Вопросы для подготовки к экзамену по математическому анализу для всех специальностей ИУ **(**кроме ИУ**9),** РЛ**,** БМТ

(в квадратных скобках указаны номера лекций по календарному плану**,** см**.** Иванков П**.**Л**.** Конспект лекций по математическому анализу **//** электронный ресурс <http://mathmod.bmstu.ru/Docs/Eduwork/ma/MAall.pdf> )

1. Сформулируйте и докажите теорему о единственности предела сходящейся последовательно- сти. [Л*. 4*]
2. Сформулируйте и докажите теорему об ограниченности сходящейся последовательности. [Л*. 4*]
3. Сформулируйте и докажите теорему о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел. [Л*. 5*]
4. Сформулируйте и докажите теорему о сохранении функцией знака своего предела. [Л*. 5*]
5. Сформулируйте и докажите теорему о предельном переходе в неравенстве. [Л*. 5*]
6. Сформулируйте и докажите теорему о пределе промежуточной функции. [Л*. 5*]
7. Сформулируйте и докажите теорему о пределе произведения функций. [Л*. 6*]
8. Сформулируйте и докажите теорему о пределе сложной функции. [Л*. 6*]
9. Докажите, что lim sin *x* = 1. [Л*. 6*]

*x→*0 *x*

Сформулируйте и докажите теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой. [Л*. 7*]

1. Сформулируйте и докажите теорему о произведении бесконечно малой функции на ограниченную. [Л*. 7*]
2. Сформулируйте и докажите теорему о связи между бесконечно большой и бесконечно малой. [Л*. 7*]
3. Сформулируйте и докажите теорему о замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела. [Л*. 8*]
4. Сформулируйте и докажите теорему о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых. [Л*. 8*]
5. Сформулируйте и докажите теорему о сумме конечного числа бесконечно малых разных порядков. [Л*. 8*]
6. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций. [Л*. 9*]
7. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности сложной функции. [Л*. 9*]
8. Сформулируйте и докажите теорему о сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки. [Л*. 9*]
9. Сформулируйте теорему о непрерывности элементарных функций. Докажите непрерывность функции *y* = sin *x*. [Л*. 9*]
10. Сформулируйте свойства функций, непрерывных на отрезке. [Л*. 10*]
11. Сформулируйте определение точки разрыва функции и дайте классификацию точек разрыва. [Л*. 9*]
12. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты. [Л*. 10*]
13. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке. [Л*. 11*]
14. Сформулируйте и докажите теорему о связи дифференцируемости и непрерывности функции. [Л*. 11*]
15. Сформулируйте и докажите теорему о производной произведения двух дифференцируемых функций. [Л*. 11*]
16. Сформулируйте и докажите теорему о производной частного двух дифференцируемых функций. [Л*. 11*]
17. Сформулируйте и докажите теорему о производной сложной функции. [Л*. 11*]
18. Сформулируйте и докажите теорему о производной обратной функции. [Л*. 11*]
19. Сформулируйте и докажите свойство инвариантности формы записи дифференциала первого порядка. [Л*. 12*]
20. Сформулируйте и докажите теорему Ферма. [Л*. 13*]
21. Сформулируйте и докажите теорему Ролля. [Л*. 13*]
22. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа. [Л*. 13*]
23. Сформулируйте и докажите теорему Коши. [Л*. 13*]
24. Сформулируйте и докажите теорему Лопиталя – Бернулли для предела отношения двух бесконечно малых функций. [Л*. 13*]
25. Сравните рост показательной, степенной и логарифмической функций на бесконечности. [Л*. 13*]
26. Выведите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. [Л*. 14*]
27. Выведите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. [Л*. 14*]
28. Выведите формулу Маклорена для функции *y* = *ex* с остаточным членом в форме Лагранжа. [Л*. 14*]
29. Выведите формулу Маклорена для функции *y* = sin *x* с остаточным членом в форме Лагранжа. [Л*. 14*]
30. Выведите формулу Маклорена для функции *y* = cos *x* с остаточным членом в форме Лагранжа. [Л*. 14*]
31. Выведите формулу Маклорена для функции *y* = ln(1 + *x*) с остаточным членом в форме Лагранжа. [Л*. 14*]
32. Выведите формулу Маклорена для функции *y* = (1 + *x*)*α* с остаточным членом в форме Лагранжа. [Л*. 14*]
33. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие неубывания дифференцируемой функции. [Л*. 15*]
34. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие невозрастания дифференциру- емой функции. [Л*. 15*]
35. Сформулируйте и докажите достаточное условие возрастания дифференцируемой функ- ции. [Л*. 15*]
36. Сформулируйте и докажите достаточное условие убывания дифференцируемой функции. [Л*. 15*]
37. Сформулируйте и докажите первое достаточное условие экстремума (по первой производ- ной). [Л*. 15*]
38. Сформулируйте и докажите второе достаточное условие экстремума (по второй производ- ной). [Л*. 15*]
39. Сформулируйте и докажите достаточное условие выпуклости функции. [Л*. 16*]
40. Сформулируйте и докажите необходимое условие точки перегиба. [Л*. 16*]
41. Сформулируйте и докажите достаточное условие точки перегиба. [Л*. 16*]

При ответе на теоретические вопросы билета формулировки теорем должны сопро**-** вождаться определениями используемых в них понятий**.** В частности**,** требуется знание следующих определений**:** предела последовательности [Л*. 4*]; предела функции (определения по Коши и по Гейне) [Л*. 5*]; окрестности и *ε*-окрестности точки *x* R [Л*. 2*]; окрестностей + , и [Л*. 2*]; сходящейся, ограниченной, возрастающей, убывающей, невозрастающей, неубывающей, мо- нотонной, фундаментальной последовательностей [Л*. 3, 4*]; бесконечно малой и бесконечно большой функций [Л*. 7*]; бесконечно малых функций: одного порядка, несравнимых, эквивалентных [Л*. 8*]; по- рядка малости [Л*. 8*]; порядка роста [Л*. 8*]; приращения функции [Л*. 9*]; непрерывной функции в точке (эквивалентные определения) [Л*. 9*]; непрерывной функции на интервале, на отрезке [Л*. 9*]; точек раз- рыва: устранимого, I-го рода, II-го рода [Л*. 9*]; наклонной асимптоты [Л*. 10*]; производной функции в точке [Л*. 11*]; односторонней (левой или правой) производной функции [Л*. 11*]; дифференцируемой функции [Л*. 11*]; дифференциала первого порядка [Л*. 12*]; производной *n*-го порядка [Л*. 12*]; дифферен- циала *n*-го порядка [Л*. 12*]; возрастающей, невозрастающей, убывающей, неубывающей, монотонной, строго монотонной функций [Л*. 15*]; строгого и нестрогого локальных минимума, максимума, экстре- мума [Л*. 15*]; стационарной и критической точек [Л*. 15*]; выпуклости (вверх или вниз) графика функции

∞

∈ ∞ −∞

на промежутке [Л*. 16*]; точки перегиба графика функции [Л*. 16*].

Знание остальных теорем**,** определений и понятий из программы курса может потребоваться при ответе на дополнительные вопросы экзаменатора**.**

# Задачи для подготовки к экзамену по математическому анализу

для всех специальностей ИУ **(**кроме ИУ**9),** РЛ**,** БМТ

# На экзамене студенту выдаётся две задачи, каждая на одну из следующих тем: «пределы»,

«сравнение бесконечно больших и бесконечно малых», «непрерывность и точки разрыва»,

# «геометрические приложения производной и формула Тейлора», «исследование функций». При подготовке к экзамену рекомендуется прорешать следующие задачи.

1. Вычислить предел:

# 1

**1.1.** lim

; **1.2.** lim

−

; **1.3.** lim √3

√3

;

5*n*

*x*3 *x*2

2

√2 + *x* − √2 − *x*

*n→∞*√ 2*n* √ 3*n* + 7

cos *n* +

*x→∞*

2*x* − 1 2*x* + 1

*x→*0

2 + *x* − 2 − *x*

*x* + *x* − 1 − 1

1

**1.7.** lim (sin *x*)cos *x*

1

; **1.8.** lim ln

*πx x* − *α*

sin 2*x* − tg 2*x*

**1.4.** lim

*x→*1

√*x*2 − 1

; **1.5.** lim tg

*x→α*

r

1 + *x*

; **1.9.** lim

sin

2*α*

; **1.6.** lim

2 *x→*0

(2*x* − 7) · ln(3*x* + 5) − ln(3*x* − 1) ;

*x*3 ;

*x→π*

2

# 2

*x→*0 *x*

1

*e*3*x−*1

1 − *x*

*x→*+*∞*

1 + 1 *x*2

*x*

ln2011 *x*

**1.10.** lim

# · arccos *x*

; **1.11.** lim

*x* ; **1.13.** lim

2011 ;

*x→*0 *π*

*x→*+*∞ e*

*x→*+*∞ x*

# 7*x*7 + 4*x*4 + 1

tg(4*x*4 + *x*2) + *ex*2 − cos 2*x*

**1.12.** lim 3 2 2 ; **1.14.** lim 2 ;

— −

*x→∞* (*x* 2) (4*x* + 5) (3*x* 1)

3*x* + 7*x*2 + cos 5*x* + arctg *x*5 + *e−x*2

*x→*0

ln(1 + 2*x* )

**1.15.** lim

*x→∞*

√*x*4

.

+ 8*x*3

# Доказать, что предел не существует:

1

√*x*2 + *x*3

# lim

*x→*0

cos √3

; **2.2.** lim

*x x→*0

; **2.3.** lim 3 .

*x x→∞*

# Выделить главную часть б.м. функции или б.б. функции:

*x*

**3.1.** *f* (*x*) = sin(√*x* + 2 − √2) при *x* → 0; **3.2.** *f* (*x*) = tg *x* − sin *x* при *x* → 0;

**3.3.** *f* (*x*) = √lg *x* при *x* → 1; **3.4.** *f* (*x*) = (2*x* + 1) arctg √

1

*x* + 3

при *x* → ∞.

1. Определить порядок малости *α*(*x*) = q3 1 + √3 *x* − 1 относительно *β*(*x*) = *x* при *x* → 0.

# Найти точки разрыва функции, исследовать их характер:

*x*

**5.1.** *f* (*x*) = 29*−x*2 ; **5.2.** *f* (*x*) =

1

*x* ln |*x* − 1|

; **5.3.** *f* (*x*) =

51*/x* 1

51*/x* + 1 ;

−

**5.4.** *f* (*x*) = (2 + *x*) · arctg *x* ; **5.5.** *f* (*x*) = |2 + *x*| ;

#  1

√





cos *, x <* 0*, x*

*π*



**5.6.** *f* (*x*) =

(2 − *x*)(1 − *x*2)

# arcsin(2 + *x*)

 *x*2 + *x*3



*, x <* 1*,*

*x*

21*/x,* 1 ≤ *x <* 2*,*

**5.7.** *f* (*x*) =

 arctg *π* − *x, x* ≥ 0;

# Найти *yjj*, если функция *y* = *f* (*x*) задана

√

 √2*, x* ≥ 2*.*

*y*

# неявно: arctg

## x

= ln *x*2 + *y*2; **6.2.** параметрически: *x* = sec *t,*

*y* = tg *t,*

*t* ∈ 0; *π .*

# Составить уравнение касательной к линии *y* = *x*2 + 4*x*, которая параллельна прямой

2

*y* − 2*x* = 0.

# В каких точках нормаль к кривой *x*2 − 2*x* + *y*2 = 0 параллельна оси *OY* ?

1. Вычислить пределы по правилу Лопиталя – Бернулли:

**9.1.** lim ; **9.2.** lim (*x* + 2*x*)1*/x*; **9.3.** lim

*x* − sin *x* 1

— ctg2 *x* .

*x→*0

*x* − tg *x*

*x→*+*∞*

*x→*0 *x*2

# Используя разложения функций по формуле Маклорена, вычислить предел:

1 − √1 + *x*2 · cos *x*

sin(*x*2) − 4*e−x*2*/*2 + 4

sin *x* − tg *x*

# lim

4 ; **10.2.** lim 3 *x*

; **10.3.** lim *x* 3 .

*x→*0

tg *x*

*x→*0

*x* (*e*

# — 1)

*x→*0

# (3 − 1)

1. Функцию *f* (*x*) разложить по целым степеням *x*, ограничиваясь членами до пятого порядка малости относительно *x*.

**11.1.** *f* (*x*) = *ex*2*−*1; **11.2.** *f* (*x*) = sin *x* + *π* ; **11.3.** *f* (*x*) = 1 − 2*x* ;

3

# √ √

1 + *x*2

1 − *x*

**11.4.** *f* (*x*) = ln 3 + *x* ; **11.5.** *f* (*x*) = *x* 3 8 *x*2; **11.6.** *f* (*x*) = *x*

−

1 − *x*2

1 − *x*2 − cos *x* · ln(1 + *x*).

# Разложить многочлен *P* (*x*) = *x*4 − 3*x*3 + *x*2 + 2*x* + 4 по степеням *x* − 2.

1. Найти асимптоты графика функции *y* = √3 12*x* − 4*x*3 и интервалы монотонности.

# Найти интервалы выпуклости графика функции *y* = *x* − arctg 5*x* и точки перегиба.

*x*

# Построить график функции *y* =

*x*2 − 4

# , определить асимптоты, точки эктремума,

интервалы возрастания и убывания, направление выпуклости графика функции и точки перегиба.

# Найти интервалы возрастания, убывания, точки экстремума функции *f* (*x*) = √3

Образец билета

|*x*2 − 1|.

Московский Государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ **0**.

# по курсу Математического анализа, 1-й курс, 1-й сем., ИУ (кроме ИУ9), РЛ, БМТ.

1. Сформулируйте и докажите теорему о замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела. (*6 баллов*)

# Сформулируйте и докажите достаточное условие возрастания дифференцируемой функции. (*6 баллов*)

1. Задача из комплекта № 1. (*6 баллов*)
2. Задача из комплекта № 4. (*6 баллов*)

# Дополнительные вопросы экзаменатора. (*6 баллов*)

Билеты утверждены на заседании кафедры ФН-12 18.11.2013 .